Czy matematyka może pomóc w pełnieniu dyżurów w szkole?

Adam Szymański (adi_epp@wp.pl)

1. Wprowadzenie

Przyznaję, iż tytuł tej notatki może wywołać w czytelniku mieszane uczucia. Przecież matematyka jest wręcz wszechobecna i jest naturalnym językiem do formalizacji naszych zachowań lub opisu otaczającej nas rzeczywistości. W trakcie przygotowywania planu dyżurów w naszym gimnazjum, dokonałem przeglądu zasobów internetowych w poszukiwaniu tzw. dobrych wzorców. Ku mojemu zdziwieniu przeglądarka internetowa Google wygenerowała olbrzymi zbiór adresów do dokumentów opracowanych przez specjalistów od spraw edukacyjnych.

Problem techniczny przydziału czasu dyżurów poszczególnym nauczycielom nie został niestety opisany. Dlaczego? Czy to zagadnienie jest tak marginalne, że nie warto się nim zajmować? Jestem odmiennego zdania! Kto kiedykolwiek pełnił dyżur w szkole zaprojektowanej i zbudowanej w latach 80-tych ubiegłego wieku, wie, o czym myślę. Poziom głośności na korytarzach przekracza w sposób zasadniczy normy, jakie zostały przyjęte na stanowiskach pracy w przemyśle. W tym aspekcie minimalizacja czasu dyżurowania poszczególnych nauczycieli jest istotnym sprawą.

Pod względem formalnym jest to zagadnienie niezwykle złożone, zaczynając do aspektów socjo-etycznych (np. dlaczego ja stoję t [czas], a koleżanka t/2), a kończąc na problemach fizjologicznych (np. jestem słabsza fizycznie, to powinnam stać krócej). Widać wyraźnie, że stopień komplikacji problemu może być, w zasadzie, dowolny. Niestety, proponowany tutaj model nie jest tak złożony. Nazywam go roboczo *modelem pensum* (***MP***), ponieważ opiera się na pensum tygodniowej ilości zajęć dydaktycznych i-tego nauczyciela pełniącego dyżur.

2. *Model Pensum* pełnienia dyżurów w szkole

Równanie bilansu czasu pełnienia dyżurów dla ***MP*** przyjmuje następującą formę,

$$\sum_{i=1}^{N} x_i = C \qquad (1)$$

gdzie: N - liczba nauczycieli pełniących dyżury,
x_i - czas dyżurowania i-tego nauczyciela w tygodniu [w godzinach],
C - czas całkowity dyżurowania w tygodniu [w godzinach].

Zakładam dalej, że

$$x_i = y_i\, p_i \qquad i = 1, 2, 3, ..., N \qquad (2)$$

gdzie: y_i - nieznany współczynnik [bezwymiarowy],
p_i - pensum tygodniowej pracy i-tego nauczyciela [w godzinach].

Zauważmy, że w praktyce p_i należy do 27-elementowego zbioru zdefiniowanego następująco: {1, 2,3, …, 27}, a równanie (1) rozpatrujemy w przestrzeni kartezjańskiej $\boldsymbol{R}^N$. Jak geometrycznie interpretować równanie (1)? Celem wizualizacji przyjmijmy dla uproszczenia, że N = 3 (w szkole pracuje tylko trzech nauczycieli). Wówczas wstawiając (2) do (1) otrzymujemy równanie płaszczyzny w $\boldsymbol{R}^3$, z punktami opisanymi współrzędnymi (y_1, y_2, y_3). Tak zmodyfikowane równanie (1) ma wówczas nieskończenie wiele rozwiązań, czyli ***MP*** nie jest jednoznaczny. Dla dowolnego N równanie (1) wraz z (2) przedstawia hiperpłaszczyznę w $\boldsymbol{R}^N$, a ***MP*** jest nadal niejednoznaczny. Pamiętamy jednak, że $\boldsymbol{R}^N$ jest przestrzenią metryczną z metryką zdefiniowaną jako:

$$\rho((y_1, \dots, y_N), (z_1, \dots, z_N)) = [\sum_{i=1}^{N} (y_i - z_i)^2]^{1/2}. \qquad (3)$$

Założmy dalej, że interesuje nas rozwiązanie ***MP*** przy minimalnej metryce (3) w stosunku do punktu $z_1 = z_2 = z_3 = \dots = z_N = 0$. Wówczas ***MP*** jest jednoznaczny, a czas dyżurowania nauczycieli jest minimalizowany w stosunku do (3). Rozwiązanie ***MP*** otrzymujemy w formie zamkniętej w postaci:

$$y_i = p_i\, C/\sum_{j=1}^{N} p_j^2 \qquad i = 1, 2, 3, \dots, N, \qquad (4)$$

co w połączeniu z (2) daje czas dyżurowania i-tego nauczyciela.

Przyjmując, że wszyscy nauczyciele mają jednakowe pensum równe p za pomocą (4) otrzymujemy: $y_i = C/Np$, a $x_i = C/N$. Aby uprościć obliczenia, często zakłada się w praktyce, że w (2) $y_1 = y_2 = y_3 = ... = y_N = y$. Tak uproszczony ***MP*** będę nazywał *uśrednionym modelem pensum* (***UMP***). Wówczas z (1) wynika, że

$$y_i = C / \sum_{j=1}^{N} p_j \qquad i = 1, 2, 3, \ldots, N, \qquad (5)$$

co można przepisać w następującej formie,

$$y_i = C_m / p_m \qquad i = 1, 2, 3, \ldots, N, \qquad (6)$$

gdzie: $C_m = C/N$ i $p_m = N^{-1} \sum_{j=1}^{N} p_j$. Interpretacja tego zapisu sugeruje nazwę ***UMP***.

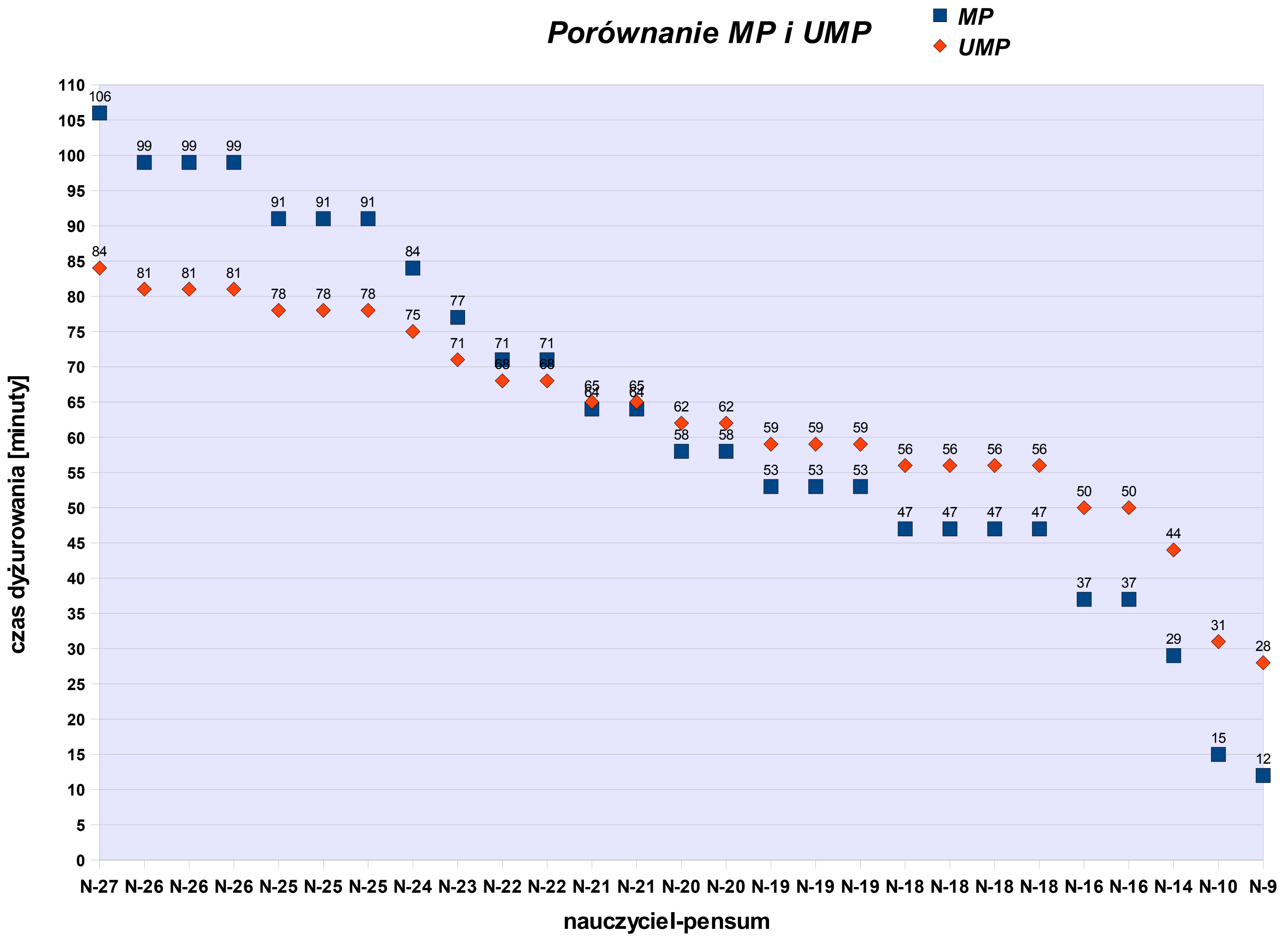
Łatwo sprawdzić, że przy założeniu stałego pensum p dla wszystkich nauczycieli pełniących dyżury, ***UMP*** daje taki sam rezultat jak ***MP***. Niestety, używając relacji (5), (4) i (2) można pokazać, że ***UMP*** obniża czas x_i dla nauczycieli o wysokim pensum, a dla nauczycieli z niskim pensum podwyższa wartość x_i - w stosunku do ***MP***.

3. Zastosowania

Przestawiam obliczenia wykonane dla naszego gimnazjum. Przyjęto następujące wartości parametrów modelu ***MP***: C = 28.33 [godziny], $p_i \in \{9, 10, 14, 16, 16, 18, 18, 18, 18, 19, 19, 19, 20, 20, 21, 21, 22, 22, 23, 24, 25, 25, 25, 26, 26, 26, 27\}$, N = 27. Najłatwiej obliczyć czas x_i w przypadku, gdy pensum wszystkich nauczycieli jest jednakowe. Wówczas otrzymujemy $x_i = C/N = 1.049$ [godziny] ≈ 63 [minuty]. W przypadku ogólnym użyłem arkusza kalkulacyjnego z pakietu OpenOffice.org 3.0. Wyniki przedstawiłem w formie graficznej. Dokonałem również porównania modeli ***MP*** i ***UMP***, aby wyraźnie pokazać różnice między proponowanymi modelami. Z obliczeń wynika, że średnia wartość x_i dla ***MP*** i ***UMP*** jest taka sama i jest równa C/N.

4. Podsumowanie

Przedstawiłem dwa modele przydziału czasu dyżurów szkolnych. Jeden z nich bazuje na minimalizacji metryki w przestrzeni kartezjańskiej, drugi zaś na dość arbitralnym założeniu upraszczającym obliczenia formalne. Obydwa modele dają taki sam rezultat końcowy tylko w przypadku, gdy pensum nauczycieli pełniących dyżury jest jednakowe. ***MP*** jest bardzo prosty. Jego skala czasowa to tydzień. Zmiana skali czasowej wymaga modyfikacji parametrów: N, p_i i C. Należałoby również urealnić ***MP***, wzbogacając go o problemy związane np. z absencją chorobową. Rozkład x_i w przestrzeni, czyli kto i gdzie pełni dyżur, też nie został uwzględniony.


Porównanie MP i UMP
MP
UMP
czas dyżurowania [minuty]
nauczyciel-pensum
0
5
10
15
20
25
30
35
40
45
50
55
60
65
70
75
80
85
90
95
100
105
110
N-27 N-26 N-26 N-26 N-25 N-25 N-25 N-24 N-23 N-22 N-22 N-21 N-21 N-20 N-20 N-19 N-19 N-19 N-18 N-18 N-18 N-18 N-16 N-16 N-14 N-10 N-9
106 99 99 99 91 91 91 84 77 71 71 64 64 58 58 53 53 53 47 47 47 47 37 37 29 15 12
84 81 81 81 78 78 78 75 71 68 68 65 65 62 62 59 59 59 56 56 56 56 50 50 44 31 28